

\$SPAD/input schaum21.input

Timothy Daly

June 15, 2008

## Contents

1	[1]:14.440	$\int \cot ax \, dx$	3
2	[1]:14.441	$\int \cot^2 ax \, dx$	5
3	[1]:14.442	$\int \cot^3 ax \, dx$	7
4	[1]:14.443	$\int \cot^n ax \csc^2 ax \, dx$	10
5	[1]:14.444	$\int \frac{\csc^2 ax}{\cot ax} \, dx$	12
6	[1]:14.445	$\int \frac{dx}{\cot ax}$	14
7	[1]:14.446	$\int x \cot ax \, dx$	15
8	[1]:14.447	$\int \frac{\cot ax}{x} \, dx$	16
9	[1]:14.448	$\int x \cot^2 ax \, dx$	17
10	[1]:14.449	$\int \frac{dx}{p + q \cot ax}$	19
11	[1]:14.450	$\int \cot^n ax \, dx$	21

1 [1]:14.440  $\int \cot ax \, dx$

$$\int \cot ax = \frac{1}{a} \ln \sin ax$$

```

(*)≡
)spool schaum21.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all

--S 1
aa:=integrate(cot(a*x),x)
--R
--R
--R          sin(2a x)          2
--R      2log(-----) - log(-----)
--R          cos(2a x) + 1      cos(2a x) + 1
--R (1) -----
--R                               2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 2
bb:=1/a*log(sin(a*x))
--R
--R      log(sin(a x))
--R (2) -----
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 3
cc:=aa-bb
--R
--R          sin(2a x)          2
--R      2log(-----) - 2log(sin(a x)) - log(-----)
--R          cos(2a x) + 1      cos(2a x) + 1
--R (3) -----
--R                               2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 4
dd:=expandLog cc
--R

```

```

--R      2log(sin(2a x)) - 2log(sin(a x)) - log(cos(2a x) + 1) - log(2)
--R (4) -----
--R                                     2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 5      14:440 Schaums and Axiom agree
ee:=complexNormalize dd
--R
--R (5)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

2 [1]:14.441  $\int \cot^2 ax \, dx$

$$\int \cot^2 ax = -\frac{\cot ax}{a} - x$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 6
```

```
aa:=integrate(cot(a*x)^2,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      - a x sin(2a x) - cos(2a x) - 1
```

```
--R (1) -----
```

```
--R      a sin(2a x)
```

```
--R
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 7
```

```
bb:=-cot(a*x)/a-x
```

```
--R
```

```
--R      - cot(a x) - a x
```

```
--R (2) -----
```

```
--R      a
```

```
--R
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 8
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R      cot(a x)sin(2a x) - cos(2a x) - 1
```

```
--R (3) -----
```

```
--R      a sin(2a x)
```

```
--R
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 9
```

```
cotrule:=rule(cot(a) == cos(a)/sin(a))
```

```
--R
```

```
--R      cos(a)
```

```
--R (4) cot(a) == -----
```

```
--R      sin(a)
```

```
--R
```

Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)

```
--E
```

```
--S 10
```

```

dd:=cotrule cc
--R
--R      cos(a x)sin(2a x) + (- cos(2a x) - 1)sin(a x)
--R (5) -----
--R      a sin(a x)sin(2a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 11      14:441 Schaums and Axiom agree
ee:=complexNormalize dd
--R
--R (6)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

3 [1]:14.442  $\int \cot^3 ax \, dx$

$$\int \cot^3 ax = -\frac{\cot^2 ax}{2a} - \frac{1}{a} \ln \sin ax$$

```

(*)+=
)clear all

--S 12
aa:=integrate(cot(a*x)^3,x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R          sin(2a x)
--R      (- 2cos(2a x) + 2)log(-----) + (cos(2a x) - 1)log(-----)
--R                               cos(2a x) + 1                    cos(2a x) + 1
--R
--R      +
--R      cos(2a x) + 1
--R
--R      /
--R      2a cos(2a x) - 2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 13
bb:=-cot(a*x)^2/(2*a)-1/a*log(sin(a*x))
--R
--R
--R          2
--R      - 2log(sin(a x)) - cot(a x)
--R (2) -----
--R          2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 14
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R
--R          sin(2a x)
--R      (- 2cos(2a x) + 2)log(-----) + (2cos(2a x) - 2)log(sin(a x))
--R                               cos(2a x) + 1
--R
--R      +
--R          2
--R      (cos(2a x) - 1)log(-----) + (cos(2a x) - 1)cot(a x) + cos(2a x)
--R                               cos(2a x) + 1
--R
--R      +
--R      1

```

```

--R /
--R      2a cos(2a x) - 2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 15
cotrule:=rule(cot(a) == cos(a)/sin(a))
--R
--R      cos(a)
--R      (4) cot(a) == -----
--R      sin(a)
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 16
dd:=cotrule cc
--R
--R      (5)
--R
--R      2      sin(2a x)
--R      (- 2cos(2a x) + 2)sin(a x) log(-----)
--R
--R      cos(2a x) + 1
--R
--R      +
--R
--R      2
--R      (2cos(2a x) - 2)sin(a x) log(sin(a x))
--R
--R      +
--R
--R      2      2
--R      (cos(2a x) - 1)sin(a x) log(-----) + (cos(2a x) + 1)sin(a x)
--R
--R      cos(2a x) + 1
--R
--R      +
--R
--R      2      2
--R      cos(a x) cos(2a x) - cos(a x)
--R
--R      /
--R
--R      2
--R      (2a cos(2a x) - 2a)sin(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 17
ee:=expandLog dd
--R
--R      (6)
--R
--R      2
--R      (- 2cos(2a x) + 2)sin(a x) log(sin(2a x))
--R
--R      +
--R
--R      2
--R      (2cos(2a x) - 2)sin(a x) log(sin(a x))

```



```

--R      +
--R      2
--R      (cos(2a x) - 1)sin(a x) log(cos(2a x) + 1)
--R      +
--R      2      2
--R      ((log(2) + 1)cos(2a x) - log(2) + 1)sin(a x) + cos(a x) cos(2a x)
--R      +
--R      2
--R      - cos(a x)
--R      /
--R      2
--R      (2a cos(2a x) - 2a)sin(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 18      14:442 Schaums and Axiom agree
ff:=complexNormalize ee
--R
--R      (7)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

4 [1]:14.443  $\int \cot^n ax \csc^2 ax \, dx$

$$\int \cot^n ax \csc^2 ax = -\frac{\cot^{n+1} ax}{(n+1)a}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 19
aa:=integrate(cot(a*x)^n*csc(a*x)^2,x)
```

```
--R
--R
--R          cos(a x)
--R      n log(-----)
--R          sin(a x)
--R      cos(a x)%e
--R (1)  -----
--R      (a n + a)sin(a x)
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 20
bb:=-cot(a*x)^(n+1)/((n+1)*a)
```

```
--R
--R      n + 1
--R      cot(a x)
--R (2)  -----
--R      a n + a
```

Type: Expression Integer

```
--S 21
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R          cos(a x)
--R      n log(-----)
--R          sin(a x)
--R      - cos(a x)%e
--R      + sin(a x)cot(a x)
--R (3)  -----
--R      (a n + a)sin(a x)
```

Type: Expression Integer

```
--S 22
explog:=rule(%e^(n*log(x)) == x^n)
--R
```

```

--R      n log(x)      n
--R (4) %e      == x
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 23
dd:=explog cc
--R
--R      n + 1      cos(a x) n
--R      sin(a x)cot(a x) - cos(a x)(-----)
--R                                     sin(a x)
--R (5) -----
--R      (a n + a)sin(a x)
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 24
cotrule:=rule(cot(a) == cos(a)/sin(a))
--R
--R      cos(a)
--R (6) cot(a) == -----
--R      sin(a)
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 25
ee:=cotrule dd
--R
--R      cos(a x) n + 1      cos(a x) n
--R      sin(a x)(-----) - cos(a x)(-----)
--R      sin(a x)      sin(a x)
--R (7) -----
--R      (a n + a)sin(a x)
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 26      14:443 Schaums and Axiom agree
ff:=complexNormalize ee
--R
--R (8) 0
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

5 [1]:14.444  $\int \frac{\csc^2 ax}{\cot ax} dx$

$$\int \frac{\csc^2 ax}{\cot ax} = -\frac{1}{a} \ln \cot ax$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 27
aa:=integrate(csc(a*x)^2/cot(a*x),x)
--R
--R
--R          sin(a x)          2cos(a x)
--R      log(-----) - log(- -----)
--R          cos(a x) + 1      cos(a x) + 1
--R (1) -----
--R                                 a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 28
bb:=-1/a*log(cot(a*x))
--R
--R          log(cot(a x))
--R (2) -----
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 29
cc:=aa-bb
--R
--R          sin(a x)          2cos(a x)
--R      log(-----) + log(cot(a x)) - log(- -----)
--R          cos(a x) + 1      cos(a x) + 1
--R (3) -----
--R                                 a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 30
cotrule:=rule(cot(a) == cos(a)/sin(a))
--R
--R          cos(a)
--R (4) cot(a) == -----
--R
```

```

--R          sin(a)
--R          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 31
dd:=cotrule cc
--R
--R          sin(a x)      cos(a x)      2cos(a x)
--R          log(-----) + log(-----) - log(-----)
--R          cos(a x) + 1    sin(a x)      cos(a x) + 1
--R (5) -----
--R                                  a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 32      14:444 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=expandLog dd
--R
--R          log(- 2)
--R (6)  - -----
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

6 [1]:14.445  $\int \frac{dx}{\cot ax} dx$   
 $\int \frac{1}{\cot ax} = -\frac{1}{a} \ln \cos ax$

<\*)+=  
)clear all

```
--S 33
aa:=integrate(1/cot(a*x),x)
--R
--R
--R          2
--R      log(-----)
--R      cos(2a x) + 1
--R (1) -----
--R          2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 34
bb:=-1/a*log(cos(a*x))
--R
--R      log(cos(a x))
--R (2) - -----
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 35
cc:=aa-bb
--R
--R          2
--R      2log(cos(a x)) + log(-----)
--R          cos(2a x) + 1
--R (3) -----
--R          2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 36
dd:=expandLog cc
--R
--R      - log(cos(2a x) + 1) + 2log(cos(a x)) + log(2)
--R (4) -----
```

```
--R          2a
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 37      14:445 Schaums and Axiom agree
ee:=complexNormalize dd
--R
--R (5)  0
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

**7** [1]:14.446  $\int x \cot ax \, dx$

$$\int x \cot ax = \frac{1}{a^2} \left\{ ax - \frac{(ax)^3}{9} - \frac{(ax)^5}{225} - \dots - \frac{2^{2n} B_n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \dots \right\}$$

```
<*>+≡
)clear all
```

```
--S 38      14:446 Axiom cannot compute this integral
aa:=integrate(x*cot(a*x),x)
--R
--R
--R          x
--R         ++
--R (1)  | %I cot(%I a)d%I
--R         ++
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

8 [1]:14.447  $\int \frac{\cot ax}{x} dx$

$$\int \frac{\cot ax}{x} = -\frac{1}{ax} - \frac{ax}{3} - \frac{(ax)^3}{135} - \dots - \frac{2^{2n} B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} - \dots$$

<\*>+≡

)clear all

--S 39 14:447 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(cot(a\*x)/x,x)

--R

--R

--R

```
--I      x
--I      ++ cot(%I a)
--I (1) | ----- d%I
--I      ++      %I
```

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E



9 [1]:14.448  $\int x \cot^2 ax \, dx$

$$\int x \cot^2 ax = -\frac{x \cot ax}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \sin ax - \frac{x^2}{2}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 40
aa:=integrate(x*cot(a*x)^2,x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R          sin(2a x)
--R      2sin(2a x)log(-----) - sin(2a x)log(-----)
--R                    cos(2a x) + 1                cos(2a x) + 1
--R
--R      +
--R          2 2
--R      - a x sin(2a x) - 2a x cos(2a x) - 2a x
--R
--R      /
--R          2
--R      2a sin(2a x)
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 41
bb:=- (x*cot(a*x))/a+1/a^2*log(sin(a*x))-x^2/2
--R
--R
--R          2 2
--R      2log(sin(a x)) - 2a x cot(a x) - a x
--R (2) -----
--R                    2
--R                  2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 42
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R
--R          sin(2a x)
--R      2sin(2a x)log(-----) - 2sin(2a x)log(sin(a x))
--R                    cos(2a x) + 1
--R
--R      +
--R          2
--R      - sin(2a x)log(-----) + 2a x cot(a x)sin(2a x) - 2a x cos(2a x)

```

```

--R          cos(2a x) + 1
--R      +
--R      - 2a x
--R  /
--R      2
--R      2a sin(2a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 43
dd:=expandLog cc
--R
--R      (4)
--R      2sin(2a x)log(sin(2a x)) - 2sin(2a x)log(sin(a x))
--R      +
--R      - sin(2a x)log(cos(2a x) + 1) + (2a x cot(a x) - log(2))sin(2a x)
--R      +
--R      - 2a x cos(2a x) - 2a x
--R  /
--R      2
--R      2a sin(2a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 44      14:448 Schaums and Axiom agree
ee:=complexNormalize dd
--R
--R      (5)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

10 [1]:14.449  $\int \frac{dx}{p + q \cot ax} dx$

$$\int \frac{1}{p + q \cot ax} = \frac{px}{p^2 + q^2} - \frac{q}{a(p^2 + q^2)} \ln(p \sin ax + q \cos ax)$$

```

(*)+=
)clear all

--S 45
aa:=integrate(1/(p+q*cot(a*x)),x)
--R
--R
--R (1)
--R      p sin(2a x) + q cos(2a x) + q      2
--R - 2q log(-----) + q log(-----) + 2a p x
--R      cos(2a x) + 1      cos(2a x) + 1
-----
--R      2      2
--R      2a q + 2a p
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 46
bb:=(p*x)/(p^2+q^2)-q/(a*(p^2+q^2))*log(p*sin(a*x)+q*cos(a*x))
--R
--R      - q log(p sin(a x) + q cos(a x)) + a p x
--R (2) -----
--R      2      2
--R      a q + a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 47
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R      p sin(2a x) + q cos(2a x) + q
--R - 2q log(-----) + 2q log(p sin(a x) + q cos(a x))
--R      cos(2a x) + 1
--R +
--R      2
--R      q log(-----)
--R      cos(2a x) + 1
--R /
--R      2      2

```

```

--R      2a q  + 2a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 48
sindblrule:=rule(sin(2*a) == 2*sin(a)*cos(a))
--R
--R      (4)  sin(2a) == 2cos(a)sin(a)
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 49
dd:=sindblrule cc
--R
--R      (5)
--R      2q log(p sin(a x) + q cos(a x))
--R      +
--R      2p cos(a x)sin(a x) + q cos(2a x) + q
--R      - 2q log(-----) + q log(-----)
--R                                  2
--R                                  cos(2a x) + 1
--R /
--R      2      2
--R      2a q  + 2a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 50
cosdblrule:=rule(cos(2*a) == 2*cos(a)^2-1)
--R
--R      2
--R      (6)  cos(2a) == 2cos(a)  - 1
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 51
ee:=cosdblrule dd
--R
--R      (7)
--R      2q log(p sin(a x) + q cos(a x)) - 2q log(-----)
--R                                                    p sin(a x) + q cos(a x)
--R                                                    cos(a x)
--R      +
--R      1
--R      q log(-----)
--R                                  2
--R                                  cos(a x)

```

```

--R /
--R      2      2
--R    2a q  + 2a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 52      14:449 Schaums and Axiom agree
ff:=expandLog %
--R
--R    (8)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

**11 [1]:14.450**  $\int \cot^n ax \, dx$

$$\int \cot^n ax = -\frac{\cot^{n-1} ax}{(n-1)a} - \int \cot^{n-2} ax$$

```

(*)+≡
)clear all

```

```

--S 53      14:450 Axiom cannot compute this integral
aa:=integrate(cot(a*x)^n,x)
--R
--R
--R      x
--R    ++      n
--R  (1)  |  cot(%I a) d%I
--R    ++
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

)spool
)lisp (bye)

```

## References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*  
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 p81